●

f est deux fois dérivables sur $IR\setminus\{2\}$ (fonction rationnelle)

$$f'(x)=(-x+2-\frac{3}{x+2})'=-1+\frac{3}{(x+2)^2}$$

$$f''(x)=(-1+\frac{3}{(x+2)^2})'=-\frac{3\times 2(x+2)}{(x+2)^4}=-\frac{6(x+2)}{(x+2)^4}$$

Tableau des variations de f'

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f''(x)$	$+$		‖	$-$	
$f'(x)$	-1 ↗	$+\infty$	‖ $+\infty$	↘	-1

Donc puisque $[-1,1]\subset]-2,+\infty[$ en déduire que f' est strictement décroissante sur $[-1,1]$

$$f'([-1,1])=\left[-\frac{2}{3},2\right]$$

d)

$$f'(x)=0\Leftrightarrow -1+\frac{3}{(x+2)^2}=0\Leftrightarrow (x+2)^2=3$$

$$\Leftrightarrow x+2=\sqrt{3}\ ou\ x+2=-\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x=-2+\sqrt{3}\ ou\ x=-2-\sqrt{3}$$

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{3}$		-2		$-2+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$4+2\sqrt{3}$	↗	‖ $-\infty$	↗	$4-2\sqrt{3}$	↘	$-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} \underset{\nearrow(-\infty)}{-x}+2+\underset{\searrow+\infty}{\frac{3}{x+2}}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} \underset{\nearrow(+\infty)}{-x}+2+\underset{\searrow-\infty}{\frac{3}{x+2}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-2^+} f(x)=\lim_{x\to-2^+} \overset{4}{-x+2}+\underset{\searrow 0^+}{\frac{3}{x+2}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-2^-} f(x)=\lim_{x\to-2^-} \overset{4}{-x+2}+\underset{\searrow 0^-}{\frac{3}{x+2}}=-\infty$$

e)

$$0\le x\le 1\Leftrightarrow 4\le (x+2)^2\le 9\Leftrightarrow \frac{1}{3}\le\frac{3}{(x+2)^2}\le\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3}\le -1+\frac{3}{(x+2)^2}\le -\frac{1}{4}\le\frac{2}{3}\Leftrightarrow\left|-1+\frac{3}{(x+2)^2}\right|\le\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow |f'(x)|\le\frac{2}{3},\forall x\in[0,1]$$

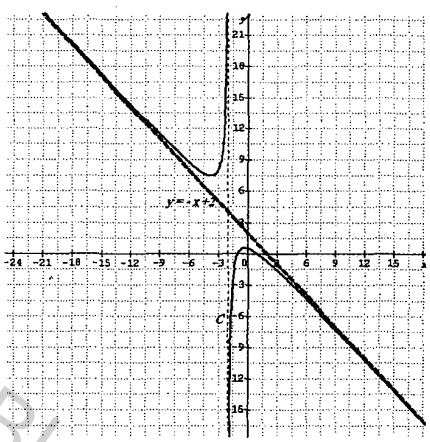
f) f est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$ et $\forall x\in[0,1]$ on a : $|f'(x)|\le\frac{2}{3}$ d'où d'après l'inégalité des accroissement finis on aura pour $x\in[0,1]$ et $y\in[0,1]$: $|f(x)-f(y)|\le\frac{2}{3}|x-y|$

● Comportement de f au voisinage de l'infini :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(-x+2)=\lim_{x\to+\infty}-\frac{3}{x+2}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-(-x+2)=\lim_{x\to-\infty}-\frac{3}{x+2}=0$$

$\Rightarrow y=-x+2$ est une asymptote oblique à C



●

a) $t\in IR$,

$$g(\pi-t)=\frac{1-\sin^2(\pi-t)}{2+\sin(\pi-t)}\overset{(\sin(\pi-t)=\sin t)}{=}\frac{1-\sin^2 t}{2+\sin t}=g(t)$$

b) $g(\pi-t)=g(t)\Rightarrow$ la droite $\Delta: t=\frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de C de plus g est de période 2π donc l'étude et la représentation graphique de la restriction g à $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ permet de construire la courbe de g ;en effet C_g est la réunion des images de (C_1 UC_1') par les translations de vecteurs $k.2\pi\vec{i}$ $k\in\mathbb{Z}$ avec C_1 la représentation graphique de la restriction g à $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ et $C_1'=S_\Delta(C_1)$

c) On remarque que g(t)=f(sin(t))
Donc g'(t)= sin'(t) .f'(sin(t))=cos(t).f'(sin(t))
Donc : $g'(t))=\cos t\times f'(\sin t)$

Carray.tn - Aqua Blech-Carray.tn